第55卷 第4期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 55 No. 4
2016年 7月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jul. 2016

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.04.003

2类图完美匹配数目的解析式*

唐保祥[1]，任 韩[2]
（1. 天水师范学院数学与统计学院，甘肃 天水 741001；
2. 华东师范大学数学系，上海 200062）

摘 要： 匹配计数理论是图论研究的重要内容之一，而且是一个有生机和活力的研究领域。它不仅有很强的应用背景，而且在过去的几十年中，它是快速发展的组合论中许多重要思想的源泉。但是，一般图的完美匹配计数问题却是 NP – 难问题。用划分，求和，再递推的方法给出了2类图完美匹配数目的计算公式，所给出的方法，可以计算出许多类图的所有完美匹配的数目。

关键词： 完美匹配；梯子；线性递推式；特征方程

中图分类号： O157.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 0529–6579（2016）04–0015–03

The analytic formula of the number of perfect matchings of two types of graphs

TANG Baoxiang[1], *REN Han*[2]
（1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China）

Abstract: Matching counting theory is an important part of graph theory and also a active research field. It has not only many applications background, and also the source of many important ideas developed during the rapid growth of combinatorics during the last several decades. But the problem of counting the number of perfect matchings for general graphs is NP-hard. By applying differentiation, summation and re-recursion calculation, several counting formulas of the perfect matchings for two specific types of graphs are given. By the method presented in this paper, the number of all perfect matchings of many graphs can be calculated.

Key words: perfect matching; ladder; linear recurrence relation; characteristic equation

图的完美匹配计数理论有很强的物理学和化学背景，其研究成果已经在多个领域得到应用。由于得到应用领域的支持，并与其他理论课题发生密切联系，受到众多学者的关注[1-11]。但是，Valiant在1979年证明了，图（即使是偶图）的完美匹配计数问题是 NP – 难问题。一般地，要给出一个图完美匹配的数目是非常困难的。本文给出了2类美匹配数目的计算公式，所给方法，适合相同结构重复出现的很多图完美匹配数目的求解。

1 概 念

定义1 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同，则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配。

定义2 两条长为 n 的路为 $P_1 = u_1u_2\cdots u_{n+1}$，$P_2 = v_1v_2\cdots v_{n+1}$，分别连接路 P_1 与 P_2 的顶点 u_i 与 $v_i(i = 1,2,\cdots,n+1)$ 所得到的图，称为长为 n 的梯子，记为 T_n。

* **收稿日期：** 2015–11–03
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（11171114）
作者简介： 唐保祥（1961年生），男；**研究方向：** 图论和组合数学；E-mail：tbx0618@sina.com

长为 4 的梯子 T_4^i 的顶点集为

$$V(T_4^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}, v_{i5}\}, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

分别连接图 T_4^i 与 T_4^{i+1} 的顶点 v_{i2} 与 $u_{i+1,2}$，v_{i3} 与 $u_{i+1,3}$，v_{i4} 与 $u_{i+1,4}(i = 1, 2, \cdots, n-1)$。这样得到的图记为 $2-nT_4$，如图 1 所示。

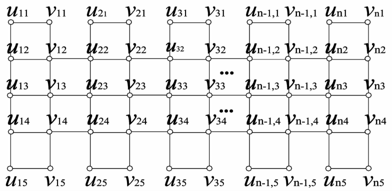

图 1　$2-nT_4$ 图

Fig. 1　Figure of $2-nT_4$

n 个长为 2 的梯子 T_2^i 地顶点集 $V(T_2^i) = \{u_{i-1,1}, u_{i-1,2}, u_{i-1,3}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}\}$，第 i 个梯子 T_2^i 与第 $i+1$ 个梯子 T_2^{i+1} 有共同的顶点 $u_{i2}, u_{i3}(i = 1, 2, \cdots, n-1)$。这 n 梯子形成的图记为 $1-nT_2$，如图 2 所示。

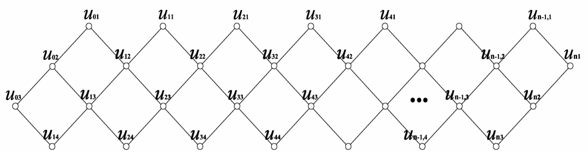

图 2　$1-nT_2$ 图

Fig. 2　Figure of $1-nT_2$

2　结果及其证明

定理 1　$f(n)$ 表示图 $2-nT_4$ 的完美匹配的数目，则

$$f(n) = \frac{17+3\sqrt{7}}{34} \cdot (5+\sqrt{17})^n + \frac{17-3\sqrt{7}}{34} \cdot (5-\sqrt{17})^n$$

证明　为了求 $f(n)$，先定义 2 个图 G_1 和 G_2，并求其完美匹配的数目。将长为 1 的路 u_1u_2 的端点 u_1 和 u_2 分别与图 $2-nT_4$ 的顶点 u_{12} 和 u_{13}，u_{13} 和 u_{14}，各连接一条边得到的图分别记为 G_1 和 G_2，如图 3 所示。易知图 G_1 和 G_2 均有完美匹配。$g(n)$，$h(n)$ 分别表示图 G_1 和 G_2 的完美匹配的数目。显然 $G_1 \cong G_2$ 所以 $g(n) = h(n)$。

先求 $g(n)$。设图 G_1 的完美匹配的集合为 M，

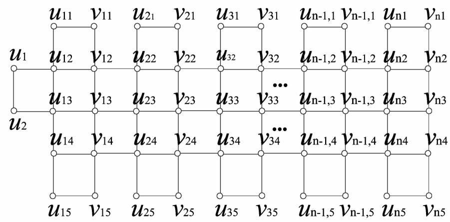

图 3　G_1 图

Fig. 3　Figure of G_1

G_1 含边 u_1u_2，u_1u_{12} 的完美匹配集合分别为 M_1，M_2，则 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$，$M = M_1 \cup M_2$，$g(n) = |M| = |M_1| + |M_2|$。

求 $|M_1|$。因为 $u_1u_2 \in M_1$，所以由 $f(n)$ 的定义知，$|M_1| = f(n)$。

求 $|M_2|$。

情形 1　设 M_{21} 是含边 $u_1u_{12}, u_2u_{13}, u_{11}v_{11}, u_{14}v_{14}, u_{15}v_{15}$ 的完美匹配，由 $g(n)$ 的定义知，$|M_{21}| = g(n-1)$。

情形 2　设 M_{22} 是含边 $u_1u_{12}, u_2u_{13}, u_{11}v_{11}, u_{14}u_{15}, v_{14}v_{15}$ 的完美匹配，由 $g(n)$ 的定义知，$|M_{22}| = g(n-1)$。

易知 $M_2 = M_{21} \cup M_{22}, M_{21} \cap M_{22} = \varnothing$，故 $|M_2| = 2g(n-1)$。因此，

$$g(n) = f(n) + 2g(n-1) \tag{1}$$

再求 $f(n)$。易知图 $2-nT_4$ 有完美匹配。设图 $2-nT_4$ 的完美匹配集合为 M'，图 $2-nT_4$ 含边 $u_{11}v_{11}$，$u_{11}u_{12}$ 的完美匹配集合分别为 M'_1, M'_2，则 $M'_i \subseteq M'$ $(i = 1, 2)$，$M'_1 \cap M'_2 = \varnothing$。故 $M' = M'_1 \cup M'_2$，$f(n) = |M'| = |M'_1| + |M'_2|$。

求 $|M'_1|$。情形 1 设 M'_{11} 是含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, u_{13}v_{13}, u_{14}v_{14}, u_{15}v_{15}$ 的完美匹配，由 $f(n)$ 的定义知，$|M'_{11}| = f(n-1)$。

情形 2　设 M'_{12} 是含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, u_{13}v_{13}, u_{14}u_{15}, v_{14}v_{15}$ 的完美匹配，由 $f(n)$ 的定义知，$|M'_{12}| = f(n-1)$。

情形 3　设 M'_{13} 是含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, u_{13}u_{14}, u_{15}v_{15}$ 的完美匹配，由 $h(n)$ 的定义知，$|M'_{13}| = h(n-1) = g(n-1)$。

情形 4　设 M'_{14} 是含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}u_{13}, u_{14}v_{14}, u_{15}v_{15}$ 的完美匹配，由 $g(n)$ 的定义知，$|M'_{14}| = g(n-1)$。

情形 5　设 M_{15} 是含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}u_{13}, u_{14}u_{15}, v_{14}v_{15}$ 的完美匹配，由 $g(n)$ 的定义知，$|M'_{15}| =$

$g(n-1)$。

易知 $M'_1=\bigcup_{i=1}^{5}M'_{1i}$，$M'_{1i}\cap M'_{1j}=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant 5)$，故 $|M'_1|=2f(n-1)+3g(n-1)$。

求 $|M'_2|$。

情形 1 设 M_{21} 是含边 $u_{11}u_{12},v_{11}v_{12},u_{13}v_{13},u_{14}v_{14},u_{15}v_{15}$ 的完美匹配，由 $f(n)$ 的定义知，$|M'_{21}|=f(n-1)$。

情形 2 设 M'_{22} 是含边 $u_{11}u_{12},v_{11}v_{12},u_{13}v_{13},u_{14}u_{54},v_{14}v_{15}$ 的完美匹配，由 $f(n)$ 的定义知，$|M'_{22}|=f(n-1)$。

情形 3 设 M'_{23} 是含边 $u_{11}u_{12},v_{11}v_{12},u_{13}u_{14},u_{15}v_{15}$ 的完美匹配，由 $h(n)$ 的定义知，$|M'_{23}|=h(n-1)=g(n-1)$。

易知 $M'_2=M'_{21}\cup M'_{22}\cup M'_{23}$，$M'_{2i}\cap M'_{2j}=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant 3)$，故

$$|M'_2|=2f(n-1)+g(n-1)$$

综上所述，

$$f(n)=4f(n-1)+4g(n-1) \tag{2}$$

把（1）式代入（2）式得

$$f(n)=8f(n-1)+8g(n-2) \tag{3}$$

由（2）式得

$$f(n-1)=4f(n-2)+4g(n-2) \tag{4}$$

（3）式 $-2\times$（4）式得

$$f(n)=10f(n-1)-8f(n-2) \tag{5}$$

（5）式的特征方程 $x^2-10x+8=0$ 的根为 $x=5\pm\sqrt{17}$。

易知 $f(1)=8$，$g(1)=10$。故由（2）式，得 $f(2)=72$。故递推式（5）的通解为

$$f(n)=\frac{17+3\sqrt{7}}{34}\cdot(5+\sqrt{17})^n+\frac{17-3\sqrt{7}}{34}\cdot(5-\sqrt{17})^n$$

证毕。

大多数存在完美匹配的 2 边连通图有指数多个完美匹配[6-11]。下面定理给出了一类有 $2n+1$ 完美匹配的 2 边连通图。

定理 2 $\sigma(n)$ 表示图 $1-nT_2$ 的完美匹配的数目，则 $\sigma(n)=2n+1$。

证明 图 $1-nT_2$ 显然存在完美匹配。图 $1-nT_2$ 含边 $u_{03}u_{02}$，$u_{03}u_{14}$ 的完美匹配的

集合分别为 M_1，M_2，则 $M_1\cap M_2=\varnothing$，$M=M_1\cup M_2$，$\sigma(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$。

图 $1-nT_2$ 的完美匹配可划分如下 3 种情形：

情形 1 图 $1-nT_2$ 包含边 $u_{03}u_{02}$，$u_{14}u_{13}$ 的完美匹配数为 1。

情形 2 图 $1-nT_2$ 包含边 $u_{03}u_{14}$，$u_{02}u_{13}$ 的完美匹配数为 1。

情形 3 由 $\sigma(n)$ 的定义，图 $1-nT_2$ 包含边 $u_{03}u_{14}$，$u_{02}u_{01}$ 的完美匹配数为 $\sigma(n-1)$。

所以，得递推关系式

$$a(n)=\sigma(n-1)+2 \tag{6}$$

易知 $\sigma(1)=3$，所以（6）式得 $\sigma(n)=2n+1$。证毕。

参考文献：

[1] ZHANG H P, ZHANG F J. Perfect matchings of polyomino graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 1997, 13(3): 259-304.

[2] KRÁL D, SERENI J S, STIEBITZ M. A new lower bound on the number of perfect matchings in cubic graphs [J]. Siam Journal on Discrete Math, 2009, 23(3):1465-1483.

[3] KARDOS F, KRÁL D, MISKUF J, et al. Fullerene graphs have exponentially many perfect matchings [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2008, 46(2): 443-447.

[4] ZHANG H P. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes [J]. Discrete Mathematics, 1996, 158(1/2/3): 257-272.

[5] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching theory [M]. New York: North-Holland Press, 1986.

[6] 张莲珠. 渺位四角系统完美匹配数的计算[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1998, 37(5): 629-633.

[7] 林泓, 林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2005, 33(6): 704-710.

[8] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154(1): 145-157.

[9] 唐保祥, 任韩. 6 类图完美匹配的数目[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2012, 51(1): 12-16.

[10] 唐保祥, 任韩. 4 类图完美匹配数目的递推求法[J]. 数学杂志, 2015, 353(2): 626-634.

[11] 唐保祥, 任韩. 3 类特殊图完美对集数的计算[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2014, 47(5): 11-16.